

Booklet Serial No.

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

پی ایچ ڈی (ریاضی) انٹرنس ٹسٹ - 2016

PhD (Mathematics) Entrance Test - 2016

پرچہ سوالات مع جوابی بیاض Question paper cum Answer script

دستخط نگران کار

وقت : دو گھنٹے
نمبرات : 75

ہال ٹکٹ نمبر

For Office Use

OMR Serial No.

For Office Use

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

پی ایچ ڈی (ریاضی) انٹرنس ٹسٹ - 2016

PhD (Mathematics) Entrance Test - 2016

پرچہ سوالات مع جوابی بیاض Question paper cum Answer script

امیدواروں کے لیے ہدایات

1. اوپر فراہم کی گئی جگہ پر امیدوار صرف اپنا ہال ٹکٹ نمبر لکھے۔ اس کے علاوہ کتابچے میں کسی بھی صفحے پر ہال ٹکٹ نمبر اور اپنا نام نہ لکھیں، اگر امیدوار نے کسی اور صفحے پر اپنا ہال ٹکٹ نمبر یا نام لکھا ہو تو اس کا پرچہ جانچا نہیں جائے گا۔
2. (16) صفحات کا یہ کتابچہ پرچہ سوالات اور جوابی بیاض پر مشتمل ہے۔ کوئی علاحدہ جوابی بیاض نہیں ہے۔ اگر اس کتابچے میں صفحات کم ہوں یا اس کی ترتیب میں کوئی غلطی ہو تو جوابات لکھنے سے پہلے ہی نگران کار سے اسے تبدیل کروالیں۔
3. یہ کتابچہ دو حصوں (حصہ اول اور حصہ دوم) پر مشتمل ہے۔ حصہ اول (Part A) میں جملہ 50 معروضی سوالات ہیں۔ ہر سوال کے نیچے 4 متبادل (A)(B) (C) (D) جوابات دیے گئے ہیں۔ سوال کے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔ پھر OMR جوابی بیاض میں اپنے منتخب کردہ جواب کے دائرہ کو گہرا کیجیے۔
4. امیدوار کو نمبرات صرف OMR جوابی بیاض میں صحیح جواب دینے پر دیے جائیں گے۔ اگر اس کتابچے میں امیدوار نے نشان لگایا ہو اور OMR میں دائرہ کو گہرا نہ کیا ہو تو ایسی صورت میں امیدوار کو کوئی نمبر نہیں ملے گا۔
5. حصہ دوم (Part B) میں جملہ 8 سوالات دیے گئے ہیں۔ جن میں سے امیدوار کو پانچ (5) سوالات کے جوابات اردو میں دینے ہوں گے۔ ان جوابات کے لیے خالی صفحات دیے گئے ہیں۔
6. امتحان ہال سے روانگی سے قبل اس کتابچے کو OMR جوابی بیاض کے ساتھ متعلقہ نگران کار کے حوالے کر دیجیے۔

اس پرچے میں جملہ 50 معروضی سوالات ہیں۔ ہر سوال کے نیچے چار متبادل جوابات A,B,C,D حروف میں دیے گئے ہیں۔ آپ سوال کے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔ پھر OMR جوابی بیاض میں اپنے منتخب کردہ جواب کے دائرہ کو گہرا کیجیے۔
(50x1=50)

1. ذیل کے بیانات میں کونسا صحیح ہے؟

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \frac{x}{1+x^2} > \tan^{-1} x > x, \quad \forall x > 0 \\ \text{(B)} \quad \frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad \forall x > 0 \\ \text{(C)} \quad \frac{x}{1+x^2} < x < \tan^{-1} x, \quad \forall x > 0 \\ \text{(D)} \quad \text{ان میں کوئی بھی نہیں} \end{aligned}$$

2. اگر $f : [0,1] \rightarrow R$ ایک تفاعل ہے تب ذیل کے بیانات میں کونسا بیان ممکن ہے؟

- (a) f غیر بستہ (unbounded) اور تسلسل تفاعل continuous functions ممکن ہے۔
(b) f مشتق پذیر (Differentiable) ہے لیکن تسلسل تفاعل نہیں ہے۔
(c) f تسلسل اور بستہ تفاعل ہے۔
(d) f مشتق پذیر ہے اور بستہ تفاعل نہیں ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{تفاعل} \quad .3$$

- (A) 0 پر مشتق پذیر ہے لیکن تسلسل نہیں
(B) $x = 0$ پر دوسرے درجہ کا مشتق رکھتا ہے
(C) $x = 0$ پر تسلسل ہے اور مشتق پذیر نہیں
(D) $x = 0$ پر غیر تسلسل اور غیر مشتق پذیر ہے

$$4. \text{ اگر } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n \sin^2 \pi x} \text{ تب } f(x)$$

- A. غیر تسلسل (discontinuous) ہے $\forall x \in R$
B. غیر تسلسل (discontinuous) ہے $\forall x \in Q$
C. غیر تسلسل (discontinuous) ہے $\forall x \in R - Q$
D. غیر تسلسل (discontinuous) ہے $\forall x \in Z$

5. اگر کھلے وقفوں (open intervals) $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ کا مجموعہ 'C' (0,1) کا کھلا کور (Open Cover) ہے تب

- (A) C کا متناہی تحت مجموعہ (0,1) کو کور کرتا ہے۔
 (B) C کا متناہی تحت مجموعہ (0,1) کو کور نہیں کرتا ہے۔
 (C) دونوں (A) اور (B)
 (D) ان میں کوئی بھی نہیں

6. فرض کرو کہ $R^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R\}$ تب ذیل کا کونسا سٹ R^2 کی تحت فضاء ہے۔

- (A) $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$
 (B) $\{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 > 0\}$
 (C) $\{(x_1, x_2) : x_1 < 0, x_2 < 0\}$
 (D) $\{(x_1, 0) : x_1 \in R\}$

7. ذیل کا کونسا بیان صحیح ہے۔

- (A) R پر ایک برداری فضاء (Vector Space) ہے۔
 (B) R پر ایک برداری فضاء (Vector Space) ہے۔
 (C) Z پر ایک برداری فضاء (Vector Space) ہے۔
 (D) ان میں کوئی بھی نہیں

8. فرض کرو کہ

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2i & 9 \\ 1-i & 3 & 4 & 7-i \\ -2i & 4 & 5 & i \\ 9 & 7+i & -i & 7 \end{bmatrix}$$

تب

- (A) M کے خیالی خصوصی قیمتیں (imaginary eigen values) ہونگے۔
 (B) M کے صرف حقیقی خصوصی قیمتیں (real eigen values) ہونگے۔
 (C) M کو درمی (Diagonalizable) بنانا ممکن نہیں
 (D) ان میں کوئی بھی نہیں

9. اگر $n \times n$ ماتر A Hermitian اور Unitary ہے۔ تب

- (A) $A^2 = I$
 (B) A حقیقی ہے
 (C) A کے خصوصی قیمتیں 0، 1 اور -1 ہیں۔
 (D) ان میں کوئی بھی نہیں

10. ذیل کے بیانات میں کونسا بیان صحیح ہے؟

- (A) خطی فضاء F^n (linear space) کا العباد (dimension) n ہے۔
 (B) خطی فضاء F^n کا العباد n نہیں ہے۔
 (C) خطی فضاء F^n کا العباد لا متناہی ہے۔
 (D) ان میں کوئی بھی نہیں

11. 168 رتبہ والے سادہ گروپ کے کتنے تحت گروپ ہونگے جس کا رتبہ 7 ہے۔

- (A) 1 (B) 7 (C) 8 (D) 28

12. پہلے رتبہ کے جزوی تفرقی مساوات (first order partial differential equation)

$$D = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \neq 0, z > 0\} \text{ ، } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

کا حل کیا ہے جبکہ ابتدائی شرائط $x^2 + y^2 = 1$ ، $z=1$ ہیں۔

$$(A) \quad z = x^2 + y^2 \quad (B) \quad (x^2 + y^2)^2 \quad (C) \quad [2 - (x^2 + y^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (D) \quad (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

13. ذیل کا کونسا سلسلہ (Series) مسترد ہے۔

$$(A) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad (B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \quad (C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log n \quad (D) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

14. ابتدائی مسئلہ $(x, y) \in R \times R$ ، $y(0) = 1$ ، $\frac{dy}{dx} = y^2$ کا یکتا حل ذیل کے کونسے وقفہ پر ہوگا؟

$$(A) \quad (-\infty, \infty) \quad (B) \quad (-\infty, 1) \quad (C) \quad (-2, 2) \quad (D) \quad (-1, \infty)$$

15. ذیل کا کونسا رنگ اصل ایڈیال دامنه (Principal Ideal Domain) ہے۔

$$(A) \quad Q[X, Y]/(x) \quad (B) \quad Z \oplus Z \quad (C) \quad Z[x] \quad (D) \quad M_2(Z)$$

16. سٹ $\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} / m, n \in N \right\}$ کے کتنے انتہائی نقاط ہیں؟

$$(A) \quad 1 \quad (B) \quad 2 \quad (C) \quad \text{متناہی (finite)} \quad (D) \quad \text{لا متناہی (infinite)}$$

17. اگر W^3 کی $(1, 0, -1)$ سے کشادہ تحت فضاء (subspace) ہے تب ذیل میں کونسا سٹ W^{\perp} کی اساس (basis) ہے؟

$$(A) \quad \{(1 \ 0 \ 1) \ (0 \ 1 \ 0)\} \quad (B) \quad \{(1 \ 2 \ 1) \ (0 \ 1 \ 1)\} \\ (C) \quad \{(2 \ 1 \ 2) \ (4 \ 2 \ 4)\} \quad (D) \quad \{(2 \ -1 \ 2) \ (1 \ 3 \ 1) \ (-1 \ -1 \ -1)\}$$

18. اگر $T: R^n \rightarrow R^n$ ایک خطی تحویل ہے تب ذیل کا کونسا بیان T کو دور بطی ظاہر کرتا ہے۔

$$(A) \quad \text{Nullity}(T) = n \quad (B) \quad R = N = n$$

$$(C) \quad R + N = n \quad (D) \quad R - N = n$$

19. تکملی مساوات $y \in C'[1, \infty)$ ، $y(x) = x - \int_1^x x y(t) dt$ کا حل ہوگا۔

$$(A) \quad y = x(1 - \log x) \quad (B) \quad y = x - e^{x-1/2}(x-1) + x$$

$$(C) \quad y = x - x(e^{x^2} - e) \quad (D) \quad \text{ان میں کوئی بھی نہیں}$$

20. اگر $\sigma = (1\ 2)\ (3\ 4\ 5)$ ، $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ ، S_6 کے مبادلیں ہیں تب ذیل کا کونسا بیان صحیح ہے۔
 (A) تحت گروپ $\langle \sigma \rangle$ اور $\langle \tau \rangle$ یکساں (Isomorphic) ہیں (B) σ اور τ ، S_6 میں مزدوج (Conjugate) ہیں
 (C) σ اور τ نقلیاتی قانون (Commutative law) پورا کرتے ہیں (D) ان میں کوئی بھی نہیں

21. اگر Q ایک میٹرک فضاء ہے جبکہ $d(p, q) = |p - q|$ تب ذیل کا کونسا بیان صحیح ہے۔
 (A) $\{q \in Q / 2 < q^2 < 3\}$ بند ہے (B) $\{q \in Q / 2 \leq q^2 \leq 4\}$ کامپیاکٹ ہے
 (C) $\{q \in Q / q^2 \geq 1\}$ کامپیاکٹ ہے (D) ان میں کوئی بھی نہیں

22. ذیل میں کونسا 'd' R پر میٹرک ہے۔
 (A) $d(x, y) = |x - 2y| + |2y - x|$ (B) $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$
 (C) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

23. ذیل کا کونسا تقابل (0,1) پر یکساں طور پر مسلسل ہے۔
 (A) $f(x) = \frac{1}{x}$ (B) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 (C) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

24. $|z|^2 + |z - 3|^2 + |z - 6i|^2$ کی اقل ترین قیمت کیا ہے جبکہ z ملطف عدد اور $i = \sqrt{-1}$ ہے۔
 (A) 15 (B) 45 (C) 30 (D) 20

25. تفرقی مساوات $\sin y \frac{dy}{dx} - \cos y = -x \cos^2 y$ کا حل ہے۔
 (A) $\sec y = x + 1 + ce^x$ (B) $\sec y = y + 1 + ce^x$
 (C) $\sec y = x - 1 + ce^x$ (D) $\sec y = y - 1 + ce^x$

26. اگر (X, τ) ایک T_3 فضاء ہے تب ذیل کا کونسا بیان صحیح ہے؟
 (A) X ایک T_2 فضاء ہے (B) X ایک T_1 فضاء ہے
 (C) X ایک T_4 فضاء ہے (D) ان میں کوئی بھی نہیں

27. ہر میٹرک فضاء ذیل کی کونسی فضاء نہیں ہو سکتی
 (A) T_2 فضاء (B) T_3 فضاء (C) T_4 فضاء (D) T_5 فضاء

28. $(x^2 + 2y^2)p - xyq = xz$ کا حل کیا ہے؟

(A) $F(xz, x^2(x^2 + y^2)) = 0$ (B) $F(yz, y^2(x^2 + y^2)) = 0$

(C) $F(zx, y^2(x^2 + y^2)) = 0$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

29. $\frac{\Delta^2(x^3)}{E}$

(A) $6x$ (B) $3x$ (C) $2x$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

30. نیوٹن ریفرن طریقے کے مستحق کا رتبہ کیا ہے؟

(A) 0 (B) 3 (C) 2 (D) ان میں کوئی بھی نہیں

31. لگرائیجین $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - q \dot{q} + q^2$ کے مزدوج (Conjugate) معیار حرکت کی قدر کیا ہے؟

(A) $\dot{q} + q$ (B) $q \dot{q}$ (C) $\dot{q} - q$ (D) $q - \dot{q}$

32. صحیح اعداد کے رنگ میں ذیل کا کونساٹ عظیمی ایڈیال ہے؟

(A) $\{17k : k \in Z\}$ (B) $\{27k : k \in Z\}$
(C) $\{77k : k \in Z\}$ (D) $\{87k : k \in Z\}$

33. اگر خارج قسمت رنگ $\frac{R}{M}$ میدان ہے تب M

(A) ایک تحت رنگ ہوگا
(B) صرف ایڈیال ہوگا
(C) ایک عظیمی ایڈیال ہوگا
(D) ایک اصل ایڈیال ہوگا

34. اگر R ایک اینگراں دامنه ہے اور $a, b \in R$ اس طرح ہے کہ $a^n = b^n$ ، $a^m = b^m$ جبکہ $(m, n) = 1$ تب
(A) $a = b$ (B) $a = b = 0$ (C) $a = b = 1$ (D) $a + b = 0$

35. فرض کرو کہ I اکائی کے ساتھ رنگ کا ایک ایڈیال ہے۔ ذیل کا کونسا بیان غلط ہے۔

(A) اگر I عظیمی ہو تو I مفرد بھی ہوگا
(B) اگر I مفرد ہو تو I عظیمی بھی ہوگا
(C) $I + I = I$ (D) $1 \in I \Rightarrow I = R$

36. اگر V میدان F پر n العباد کی برداری فضاء ہے تب V ذیل میں کس سے یک مارنگ ہے۔

(A) F^{2n} (B) F^n
(C) $nF = \{na : a \in F\}$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

37. $R^3(R)$ کی اساس ذیل میں کونسی ہے؟

(A) $\{(1, 2, 0), (2, 4, 4), (2, 4, 0)\}$

(B) $\{(1, 2, 0), (2, 1, 2), (3, 1, 1)\}$

(C) $\{(1, 2, 0), (2, 1, 2), (3, 3, 2)\}$

(D) $\{(1, 2, 0), (2, -1, 1), (3, 1, 1)\}$

38. برداروں (Vectors) $(1, 2, 1)$ ، $(2, 1, 0)$ اور $(4, 5, 2)$ سے کشادہ فضاء کی العباد کیا ہے؟

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

39. اگر $T: R^3 \rightarrow R^3$ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ $T(x, y, z) = (0, x, y)$ تب $(To To T)(a, b, c) =$

(A) $(0, a, b)$ (B) $(0, 0, a)$

(C) $(0, 0, 0)$ (D) $(a, b, 0)$

40. $f(z) = |z|^2$

(A) ہر طرف analytic ہے (B) کہیں بھی analytic نہیں ہے

(C) $z = 0$ پر analytic ہے (D) ان میں کوئی بھی نہیں

41. اگر $f(z)$ اینٹیئر (entire) ہے تب

(A) $f(z) \forall z$ analytic ہے (B) $f(z) \forall z$ مستع ہے

(C) $f(z) \forall z$ analytic نہیں ہے (D) ان میں کوئی بھی نہیں

42. ذیل کا کونسا تفاعل analytic ہے؟

(A) $f(z) = \text{Re}(z)$ (B) $f(z) = \text{Im}(z)$

(C) $f(z) = \bar{z}$ (D) $f(z) = \sin z$

43. اگر $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ تب ذیل کا کونسا بیان غلط ہے۔

(A) تفاعل 'u' Harmonic ہے (B) تفاعل 'u' Harmonic نہیں ہے

(C) 'u' کا Harmonic مزدوج $\tan^{-1} \frac{y}{x} + c$ ہے (D) Laplace مساوات کو 'u' پورا کرتا ہے

44. اگر $f(z) = u + iv$ اور $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ تب $f(z)$ analytic ہے تب

(A) $-iz^3 + d$ (B) z^2 (C) $z^2 + 1$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

45. غیر متجانس مساواتوں کے نظام (System of Non-Homogeneous Equations) $x + 2y - z = 4$ ، $2x - 3y + z = 3$ ، $5x - 4y + z = 5$ کے کتنے حل ہیں؟
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) ان میں کوئی بھی نہیں
46. اگر V پر 3×3 ماتریس کی برداری فضاء ہے تب $V(R)$ کی العباد کیا ہے؟
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 8
47. ہر میٹریٹریبل فضاء
 (A) ہاسڈارف ہے (B) نارمل ہے (C) کامپیاکٹ ہے (D) ان میں کوئی بھی نہیں
48. S_5 کے کتنے عناصر رتبہ 5 والے ہیں۔
 (A) 5 (B) 20 (C) 24 (D) 12
49. $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ کا دوہری قطب $z = -1$ پر باقی کیا ہے؟
 (A) $\frac{3}{25}$ (B) $-\frac{3}{25}$ (C) $\frac{14}{25}$ (D) $-\frac{14}{25}$

50. $(D^3 - 4D^2D' + 4DD'^2)z = \cos(2x + y)$ خصوصی تانگل ہے۔

- (A) $\frac{x^2}{4} \cos(2x + y)$ (B) $\frac{x}{4} \cos(2x + y)$
 (C) $\frac{x^2}{4} \sin(2x + y)$ (D) $\frac{x}{4} \sin(2x + y)$

PART - B (ب) حصہ

5 x 5 = 25

درج ذیل میں سے 5 سوالوں کے جواب مطلوب ہیں۔ ہر سوال کے پانچ نمبرات ہیں۔

- 1- ثابت کرو کہ کثیر رکنی $x^3 - 2$ کی Q پر اسپلٹنگ میدان (splitting field) کی توسیع کا درجہ 6 ہوگا۔
- 2- ثابت کرو کہ میٹرک فضاء کا ہر کامپاکٹ تحت سٹ مکمل (Complete) ہوگا۔
- 3- فرض کرو کہ H ایک ہلبرٹ فضاء (Hilbert space) ہے اور $T : H \rightarrow H$ ایک دوربطی بستہ عامل (Bijective operator) ہے۔ تب ثابت کرو کہ $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ وجود رکھتا ہے اور $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ ہوگا۔
- 4- ثابت کرو کہ 108 رتبہ والے گروپ G کے نارمل تحت گروپ (normal subgroup) کا رتبہ 27 یا 9 ہوگا۔
- 5- حدودی شرائط $u(0, t) = 0 = u(l, t)$ اور ابتدائی شرط $u(x, 0) = \frac{100x}{l}$ سے مساوات $\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ کا حل معلوم کرو۔
- 6- دوسرے شمار پذیر فضاء (Second Countable Space) کی تعریف کرو۔ Lindelof's کے نظریہ کو بیان اور ثابت کرو۔
- 7- ثابت کرو کہ متناہی العباد کی برداری فضاء (Finite Dimensional Vector Space) کے کسی بھی دو اساسوں کے عناصر کی تعداد مساوی ہوتی ہے۔
- 8- Cauchy's کے باقی (residue) نظریہ کو بیان اور ثابت کرو۔

Rough Work

Rough Work